

数学科における中高連携

高校数学とのなだらかな接続を志向する中学校数学科授業への提案

岡山県矢掛町小中高連携数学教育研究会

代表 川 上 公 一

1 はじめに

数学科における中高連携は、公立の中等学校あるいは中高連携(一貫)校におけるカリキュラム編成の文脈から語られることが多い。

従前から、いわゆる私立進学校で行われてきた授業内容の前倒しによって、できるだけ早い段階で教育課程を終了し、受験のための時間を確保することに流れている公立一貫校も少なくないと聞く。高校の学習内容を中学校に前倒しする。時間短縮のためにはスパイラルを廃し、体験活動を省略することが有効かもしれない。

ところが、現実の高校教育はそればかりではない。高校生にとって数学と向き合う姿は、極めて多様である。

- ・数Ⅲまで内容を理解し、大学入試でも選択する生徒
- ・数Ⅱ数Bまでの数学の学習をしているが、大学入試では数Ⅰしか必要としない生徒
- ・数学の学習をしているが、大学入試では数学を必要としない生徒
- ・数学の学習をしているが、就職試験やしたり推薦入学選考したりで進路選択する生徒
- ・中学校段階の数学を学び直しする生徒
- ・小学校段階の算数から学び直しする生徒

ただ、いえるのは、高校は学校によって学習者のターゲットを絞り込むことができる。中には、小学校と中学校の滑らかな接続のために、小学校の学習内容を学び直しする、拙著「中1ギャップ撃退トレーニングワーク」⁽¹⁾ がとてもよい教材で、生徒の状態に適して活用しているといった高校の先生もいた。

ところが、市町村立中学校の場合は、こういった多様な生徒が同じ教室にいて一斉授業を行っているのである。当然、高校内容の前倒しなど非現実的であり、中学校の学習内容とこれまでの内容の学び直しに日々追われているのが現実である。

しかしながら、「何のために数学を勉強するのか」という生徒の質問に「高校に入るため」と答えるのは、あまりにも空しく生徒に対しても失礼である。「数学を勉強することは大切なんだ」「この内容は、次はこのように発展するんだよ」「社会の発展や君の将来のために役に立つんだよ」と答えることができたらと思う。さらに言えば、「数学はおもしろい」「もっと数学の勉強がしたい」「高校の数学学習に興味がある」と思えるような生徒を少しでも増やすことができたらと思う。

中高連携は、知識や技能の棚卸しではなく、少し大げさではあるが、21世紀を切り拓く心豊かでたくましい日本人の育成を目指すという観点から検討されるべきである。

2 学習指導要領から

(1) 数学科の改善基本方針から

平成 20 年の中央教育審議会答申で、学習指導要領改訂の基本的な考え方が示されるとともに、各教科等の改善の基本方針や主な改善事項が示されている。

そこでは、算数・数学科の改善の基本方針として「課題を踏まえ、小・中・高等学校を通じて、発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする」と示されている。

その具体的な対応については以下のことを求めている。(2)

- ① 知識・技能の確実な定着を図るために、内容の系統性を重視し、段階に応じたスパイラルによる教育課程を編成する。
- ② 論理的な思考や知的なコミュニケーションを図るために、思考力、判断力、表現力等の育成を重視し、言語活動を充実する。
- ③ 学んだことを活用したり、実感を伴って理解したりすることを重視し、学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感できるようにする。
- ④ 算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実し、また、言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにする。

特に、算数的活動・数学的活動について、小・中学校では学習指導要領で各学年の内容において具体的に示すとともに、高等学校では、必修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付けている。

中高の連携に関しても、基盤となる位置づけはこの改善の趣旨である。その中でも特に重要視したいのは

- ・スパイラルの重視
- ・言語活動・体験活動の充実
- ・有用性の実感による学ぶ意欲の向上

だと考える。本稿では、このような立場から中学校での授業実践例の提案と高校における授業改善のあり方について提案したい。

(2) 高等学校学習指導要領目標から ～小中高の関連を中心に～(3)

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる。

「**数学的活動を通して**」が、新たに挿入された。小学校・中学校と合わせて目標全体に関係させることで小・中・高で継続的に数学的活動を重視することを求めている。

高校では特に次の活動を重視するよう示している。(4)

- 自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりする。
- 学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用する。
- 自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりする。

「**数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深める**」については、中学校で「基礎的な概念や原理・法則」を高等学校では「基本的な概念や原理・法則」と示されている。高等学校では、中学校に比べて体系的に整った基本的な内容を学ぶとともに、より高度の数学の学習に入ることを示している。

「**積極的に活用して数学的論拠に基づいて判断する態度を育てる**」は、小学校で「進んで生活や学習に活用しようとする態度を育てる」中学校で「それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる」と示されている。知識理解だけでなく、活用する態度も児童生徒の発達に応じて高まっていくのである。

このように、小・中・高の学習指導要領目標を比較してみると、それぞれの段階で身につけるべき目標が明確に示されており、それに沿った形で、小中高の連携がなされなければならない。

中学校と高校で同じ学習課題が設定できることがある。たとえば、確率では

赤玉2個と白玉3個の入った袋から同時に2個とりだすとき、赤玉1個白玉1個である確率を求めよ。

中学校では、全部調べ上げ、その中から赤玉1個白玉1個である場合の数を調べ、確率を求める。高校では、

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{3}{5}$$

と計算式を立て求める。高校のやり方の方が早いから「数え上げ」など適当にしてすぐに、式を教えればいいというのは暴論である。中学校では数え上げによって基礎的な概念や原理・法則について操作を通して身につけるのであり、高校では、それに基づきより高度な原理・法則を獲得するのである。かつて筆者が附属中学校にいたとき、機械的に ${}_nC_r$ を使って計算している生徒がいた。「すごいことを知っているね」と問うと「塾で習った、一発で答えが出るものね」と答えた。しかしテストで、「確率が $3/5$ となることを説明しなさい」と問うと答えられない。図を描くだけで正解なのに。

(3) 中学校校学習指導要領解説から ～内容を中心に～

中学校数学科で取り上げる内容については、(6)

- ・日常生活や社会において自立的に生きる基盤として不可欠であり常に活用できるようになっていることが望ましい内容
- ・義務教育以降の様々な専門分野における学習を深めていく上で共通の基盤として習得しておくことが望ましい内容

の二つの視点から構成されている。

日常生活における経験を性質や法則としてまとめた小学校算数科の内容を基に、それらとの関連に配慮し質的に深め広げることが大切になるとともに、高校数学科における学習への準備段階としての位置付けに配慮することを求めている。準備段階であるので、高等学校の内容に踏み込むことは求めている。中学校では、加減乗除で解決できる一次の世界が主になる。一次の世界の特殊性を知るために、二次方程式、三平方の定理、二乗に比例する関数等の二次の世界に踏み込むのである。ここで、さらに数学の視野を広げていくその次にはさらに、「こんなものも待っているよ」と二次関数のグラフのふるまいを見せたりすることができる。このような形で高校の学習内容に触れることによって学習への関心意欲が向上する。

また、中学校の「数学的活動」で重視しているのは、

- | |
|-----------------------|
| ア 数や図形の性質などを見いだす活動、 |
| イ 数学を利用する活動 |
| ウ 数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動 |

である。これらの数学的活動は問題解決として行われている。その過程で、

試行錯誤をしたり、操作したり、資料を収集整理したり、実験したり、観察したりするなど数学にかかわりのある様々な営みが行われる

のである。

数学的活動では、生徒が自立的、主体的に取り組む機会を意図的、計画的に設けることとしている。その際、生徒の発達の段階や学習する数学の内容に配慮し、次の表を示している。(6)

	第1学年	第2・3学年
ア 数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだし、発展させる活動
イ 数学を利用する活動	日常生活で、数学を利用する活動	日常生活や社会で、数学を利用する活動
ウ 数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動	数学的な表現を用いて、自分なりに説明し伝え合う活動	数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動

3 中学校課題学習による中高接続の可能性

前表の中で、構成主義によって裏付けされる「既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだし、発展させる活動」は、問題解決の過程で、生徒が学習内容を主体的に発展させ、高校内容にまで接近しようとする可能性をもっている。

(1) 数や図形の性質などを見いだす活動の例

解の公式を用いて二次方程式を解いているときに、解の形状に様々なものがあることに気づくことがある。

二次方程式の解をいくつかのタイプに分類しよう。

と、学習課題を設定すれば、課題学習の開始である。

- ・ 根号がそのまま残る形
- ・ 根号は残るが約分できる形
- ・ 根号がなくなり解が有理数になる形

試行錯誤したり帰納したりすることによって、二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において b が偶数のときに約分できることに気づく。

そして、この機会に解が有理数になる場合は因数分解ができることに触れておけば a が 1 でなくても因数分解できる場合があることを理解できる。そして「これについては高校で勉強する内容である」ことに触るだけで高校の学習に興味がわいてくる。「たすき掛け」を教える必要はなく、スパイラルを踏襲すればいいのである。

一方、解の個数に注目する生徒も出てくる。

- ・ 解が 1 つ
- ・ 解が 2 つ

これまでの経験から、 $(x + p)^2 = 0$ の形になっていれば、解が 1 つであることに気づいている生徒は多くいるはずである。それを解の公式で解いてみると、根号の中が 0 になっていることが分かる。「解がない場合もあるんだよ」といって、例を示して解の公式で解かせてみれば「ルートの中がマイナスになっているから解がないんだね」という結論を導き出すことができる。【判別式】などという用語・考え方には、あえて触れないでおく。

高校生になって判別式の学習をしたときに、「中学校でも考えたことがあったなあ」と思い出すことがある。それで十分なのである。

(2) 数学を利用する活動の例

中学校・高校で統計分野が大きく復活した。中学校では「D資料の活用」として独立した領域となった。これまでの「C数量関係」の領域に位置付けていた確率に関する内容に、資料の特徴や傾向を数学的に考察し把握することや、母集団の特徴を標本調査により推測することを加え、それらを利用して日常生活や社会で起こる事象を取り上げて考えたり判断したりする活動を中心に構成している。

高校でも、中学校の「D資料の活用」を継承する形で「(4) データの分析」が設定された。様々な事象から見いだされる確率や統計に関するデータを、中学校では「資料」と表したが、高等学校では生活の中で活用することや統計学とのつながりを一層重視し、一般的に用いられる「データ」という用語を用いることとしたとされる。ここでは、統計の用語の意味やその扱いについて理解させ、表計算用のソフトウェアや電卓も適宜用いて、目的に応じデータを収集・整理し、四分位数、四分位範囲、四分位偏差、分散、標準偏差、散布図及び相関係数などに着目させ、データの傾向を的確に把握することができるようにして

いる。また、従前の「相関図」も、今回の改訂で「散布図」に改めることにしている。

このように、「D資料の活用」は高校との学習内容の関連も深く、数学的活動としても取り扱いやすい内容である。

日常生活や社会で、数学を利用する数学的活動として是非地域の素材を取り上げたい。

地域の人口を調べてみよう。

と、学習課題を設定すれば、課題学習の開始である。

自分の住んでいる地域の様々な情報をインターネットから簡単に入手できるようになってきた。

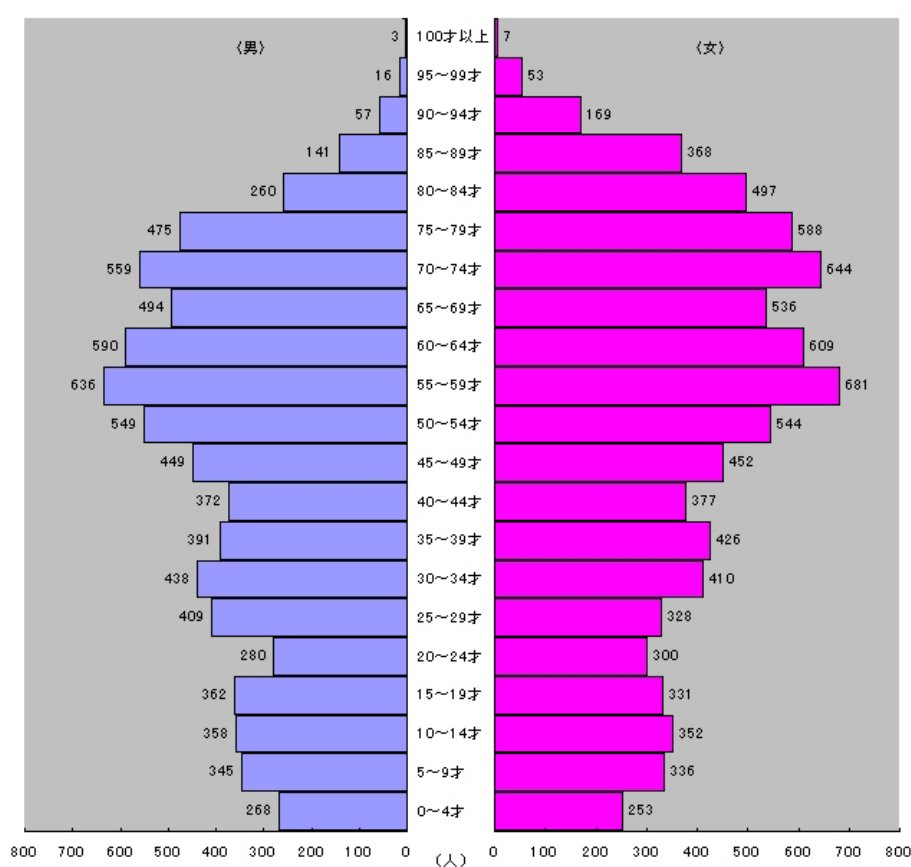


図 矢掛町の人口ピラミッド（平成 17 年） Copyright(C) 2010 矢掛町役場

図は、岡山県矢掛町の年齢別・男女別人口を示した人口ピラミッドであり、町の WEB ページに公開されている。

「平均値、中央値、最頻値のどれを代表値とするのがいいだろうか」と発問する。生徒は迷わず最頻値を選ぶ。この場合最頻値は、男女とも 55 歳～59 歳であることが分かる。これは重要な情報である。さらに、行政では正確で客観的なデータとして平均値を代表値としていることにも触れる。

コンピュータの表計算ソフトを用いれば、資料の個数が多くても簡単に代表値を求めら

れることや、ネットワーク上のデータをコピー&ペーストして加工できることも見せておきたい。また、コンピュータでいろいろなグラフを作成することにも触れておきたい。一方、ネットワーク等を活用して資料を収集する場合は、二次的な資料が多くなるので、その信頼性に注意すべきであることも理解させておく必要がある。

身近なことからや地域の素材を取り上げるには、他教科での学習や総合的な学習の時間との連携が大切になる。たとえば、人口ピラミッドについての考察は社会科で取り上げるのにふさわしいであろう。その科学的な裏付けをするために数学科で代表値を取り上げるのである。また、コンピュータで代表値を求めたりグラフを作成したりする場合には、技術・家庭科との連携を重視しなければならない。

以前の統計教育では、人口ピラミッドのようなヒストグラムをつくることに重点が置かれていた。新しい学習指導要領のもとでは、情報を正しく読み取り、的確に判断し、それを説明することを求めており、グラフをつくったり、代表値を計算で求めたりすることと同様に、代表値として何を選んだかを根拠をもって説明することは、重要な能力である。

日常事象を理想化・単純化して、数学の舞台に乗せ、数学的に処理し、結果を導き出す。その結果を日常生活に照らして解釈し問題を解決する。このような数学的活動としてヒストグラムや代表値の学習は位置づけられる。

(3) 数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動の例

数学的表現として文字を利用して、自分の考えを説明したり、性質や関係を説明したりすることに苦手意識をもつのは、中学校・高校共通の課題である。筆者が所属している中高連携の学習会でも「高校の数学を理解するためには文字式への抵抗感をどれだけなくすかだろう。変数と定数の感覚的な理解を深める内容がほしい」という高校数学科の教員の指摘がある。「分からないものを式 a や x として…」としどうしても、文字で表すことの意味が理解できない生徒がいる。それらの生徒の中には方程式の x のように未知数としての扱いをしてきており、一つの文字が一つの数を表すという意識をもっている生徒が多い。文字の意味やその必要性や効果を理解できずに、中学校段階でつまづいてしまう生徒にとって、高校数学における文字の多用は抵抗感を過ぎて挫折感までも味わうことになる。

学習や発達の段階を追って文字の式を用いた説明をすることで徐々に文字を利用することに習熟させていきたい。それがスパイラルのねらいである。

中学2年段階でも「偶数と偶数の和は偶数になる」「奇数と奇数の和は偶数になる」等の学習は可能である。中学3年では乗法公式や因数分解の公式を学習する。これらの公式は数や図形の性質などが成り立つことを、文字式を用いて説明する場合にしばしば活用される。「連続する二つの偶数の積に1をたすと奇数の2乗になる」ことを説明するような場合である。

中学2年の課題学習の素材としてカレンダーを用いる。

カレンダーの中の□で囲まれた9つの数の和は一発で求めよう。

と、学習課題を設定する。

真ん中の数を n とすると

$n-8$	$n-7$	$n-6$
$n-1$	n	$n+1$
$n+6$	$n+7$	$n+8$

となり、

n	n	n
n	n	n
n	n	n

月	火	水	木	金	土	日
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

の和と等しいから、(真ん中の数) $\times 9$ で簡単に計算できることがわかる。

この学習課題でも左上の位置が、 $n-8$ と表せることなどできるだけ丁寧に指導したい。また、 が移動しても、この関係が成り立っていることも確認したい。

次に、カレンダーに潜む数量の間の関係をできるだけ多く発見させ、文字を用いて自分の考えを説明させる。

横に並ぶ3数の和は、真ん中の数の3倍

- ・縦に並ぶ3数の和は、真ん中の数の3倍
 - ・斜めに並ぶ3数の和は、真ん中の数の3倍
- 以外にも

- ・横に並ぶ5数の和は、真ん中の数の5倍
- ・横に並ぶ7数の和は、真ん中の数の7倍

などがでることが期待できる。

さらに、中学3年になると、

カレンダーの中の□で囲まれた4つの数の斜めの積の差は常に7である。

と、発展させることができる。

左上の数を n とすると

n	$n+1$
$n+7$	$n+8$

だから、

積の差は $(n+1)(n+7) - n(n+8) = (n^2 + 8n + 7) - (n^2 + 8n) = 7$ となる。

文字や文字式を用いることによって、数量やその関係を簡潔・明瞭に、しかも一般的に表現することができる。文字を用いた式に表現できれば、その後は目的に合うように形式的に処理することができる。そして、この内容は、数と同様に高校も含めた数学の学習全般の基盤となる知識・技能として極めて重要になってくる。